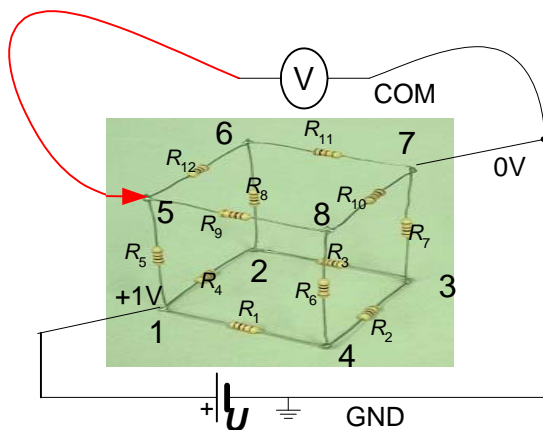


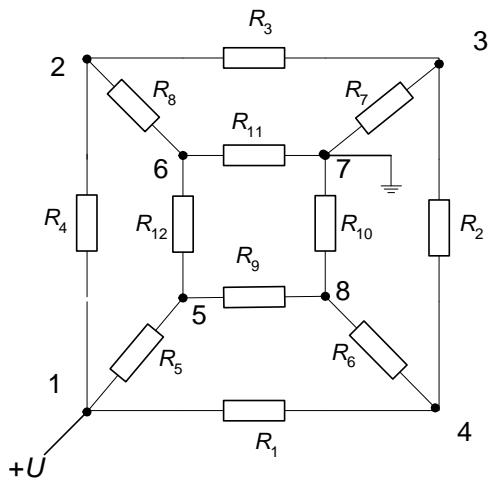
## Otpornici u bridovima kocke (resistor cube)

Od 12 otpornika napravljena je kocka. Otpornici su u bridovima kocke. Izvor možemo priključiti između bilo koja dva vrha. Na slici 1 je izvor priključen između vrhova **1** i **7** (dijagonalno). Čvor **7** je na potencijalu nula (*referentni čvor*). Znači da je potencijal čvora **1** jednak  $+U$ . Potencijali ostalih čvorova su manji od  $U$  i potrebno ih je izračunati. Nakon toga možemo izračunati struje kroz sve otpornike (bridgeve kocke) kao i ukupnu struju te ukupni otpor. Struje označavamo s indeksima koji se odnose na početni i završni čvor npr.  $I_{12}$  je struja od čvora **1** prema **2**. Otpornike smo označili s 1-12. Na slici 1 je prikazan voltmetar koji mjeri potencijal čvora **5**. Prvi način određivanja potencijala i otpora je očito eksperimentalan. U laboratoriju napravimo opisanu kocku, zatim voltmetrom izmjerimo potencijal. Iz poznatih potencijala zatim izračunavamo struje, a onda i ukupan otpor (koji možemo izmjeriti ometrom). Danas postoje mnogi programi za simulaciju strujnih krugova kojima također možemo analizirati strujne i naponske priike u različitim mrežama pa tako i u ovoj. Ako su svi otpornici jednaki možemo koristeći izvjesnu simetriju, Kirchhoffove zakone, mogućnost pretvorbe trokut $\leftrightarrow$ zvijezda logičkim zaključivanjem doći do rješenja opisanog problema (potražite internet stranice koje se odnose na **resistor cube** problem).



Slika 1

Ovdje ćemo pokazati kako do rješenja dolazimo primjenom postupka za analizu el. mreža poznatog pod nazivom **metoda napona čvorova**. Potrebno je najprije kocku prikazati kao spoj otpornika. Otpornike gornje stranice i okomitih bridova projiciramo u ravninu donje stranice i dobijemo *planarnu mrežu* (vidi sliku 2). Ovu mrežu možemo opisati s osam *jednadžbi čvorova*. Budući da je jedan od čvorova (ovdje čvor **7**) na potencijalu nula (*referentan*), a drugi na potencijalu  $+U$  (ovdje čvor **1**) broj jednadžbi će se smanjiti na šest.



**Slika 2**

U tim jednadžbama su nepoznanice potencijali čvorova **2, 3, 4, 5, 6, 8**. Iz matematike (*linearna algebra*) je poznata *matrična metoda* za rješavanje sustava linearnih jednadžbi pa ako imamo odgovarajući program koji “zna” računati sa matricama (imamo ga!) neće biti nikakav problem dobiti rješenje tj. potencijale čvorova **2, 3, 4, 5, 6, 8**. Pisanje jednadžbi je jednostavno (na razini recepta)

$$+ \varphi_1 \cdot g_{11} - \varphi_2 \cdot g_{12} - \varphi_3 \cdot g_{13} - \varphi_4 \cdot g_{14} - \varphi_5 \cdot g_{15} - \varphi_6 \cdot g_{16} - \varphi_7 \cdot g_{17} - \varphi_8 \cdot g_{18} = I_{11} \quad (1)$$

$$- \varphi_1 \cdot g_{21} + \varphi_2 \cdot g_{22} - \varphi_3 \cdot g_{23} - \varphi_4 \cdot g_{24} - \varphi_5 \cdot g_{25} - \varphi_6 \cdot g_{26} - \varphi_7 \cdot g_{27} - \varphi_8 \cdot g_{28} = I_{22} \quad (2)$$

$$- \varphi_1 \cdot g_{31} - \varphi_2 \cdot g_{32} + \varphi_3 \cdot g_{33} - \varphi_4 \cdot g_{34} - \varphi_5 \cdot g_{35} - \varphi_6 \cdot g_{36} - \varphi_7 \cdot g_{37} - \varphi_8 \cdot g_{38} = I_{33} \quad (3)$$

$$- \varphi_1 \cdot g_{41} - \varphi_2 \cdot g_{42} - \varphi_3 \cdot g_{43} + \varphi_4 \cdot g_{44} - \varphi_5 \cdot g_{45} - \varphi_6 \cdot g_{46} - \varphi_7 \cdot g_{47} - \varphi_8 \cdot g_{48} = I_{44} \quad (4)$$

$$- \varphi_1 \cdot g_{51} - \varphi_2 \cdot g_{52} - \varphi_3 \cdot g_{53} - \varphi_4 \cdot g_{54} + \varphi_5 \cdot g_{55} - \varphi_6 \cdot g_{56} - \varphi_7 \cdot g_{57} - \varphi_8 \cdot g_{58} = I_{55} \quad (5)$$

$$- \varphi_1 \cdot g_{61} - \varphi_2 \cdot g_{62} - \varphi_3 \cdot g_{63} - \varphi_4 \cdot g_{64} - \varphi_5 \cdot g_{65} + \varphi_6 \cdot g_{66} - \varphi_7 \cdot g_{67} - \varphi_8 \cdot g_{68} = I_{66} \quad (6)$$

$$- \varphi_1 \cdot g_{71} - \varphi_2 \cdot g_{72} - \varphi_3 \cdot g_{73} - \varphi_4 \cdot g_{74} - \varphi_5 \cdot g_{75} - \varphi_6 \cdot g_{76} + \varphi_7 \cdot g_{77} - \varphi_8 \cdot g_{78} = I_{77} \quad (7)$$

$$- \varphi_1 \cdot g_{81} - \varphi_2 \cdot g_{82} - \varphi_3 \cdot g_{83} - \varphi_4 \cdot g_{84} - \varphi_5 \cdot g_{85} - \varphi_6 \cdot g_{86} - \varphi_7 \cdot g_{87} + \varphi_8 \cdot g_{88} = I_{88} \quad (8)$$

$g_{mm}$  je *vlastita vodljivost* čvora - to je zbroj vodljivosti koje su direktno spojene na pojedini čvor npr. za čvor **1** dobivamo  $g_{11}=1/R_1+1/R_4+1/R_5$ , a ako su svi otpori jednaki  $g_{11}=3/R$ .

$g_{mn}$  je *međuvodljivost* spojena između čvorova  $m$  i  $n$ . Npr. u našoj mreži je  $g_{12}=g_{21}=1/R_4$  odnosno ako su svi otpornici jednaki  $g_{12}=g_{21}=1/R$ . Nadalje vidimo da su neke *međuvodljivosti* nula, npr.  $g_{25}=g_{52}=0$  jer između tih čvorova nema *direktno* spojenih otpora odnosno vodljivosti ( $G=1/R$ ).

**Važno:** opazite da u jednadžbama (1)-(8) uz *vlastite vodljivosti* dolazi +, a *međuvodljivosti* - !

$I_{mm}$  je strujna uzbuda čvora  $m$  - to je zbroj svih struja strujnih izvora koji su spojeni na taj čvor (ovdje je npr.  $I_{11}=I_{22}=\dots=0$ , jer nema tih izvora). Ali kada bi npr. između čvorova (*vrhova kocke*) **1** i **2** imali strujni izvor od 3 A (smjer prema čvoru **2**) tada bi imali  $I_{11}=-3$  A te  $I_{22}=3$  A.

$$\begin{aligned}
 g_{11} &= \frac{3}{R} & g_{12} &= \frac{1}{R} & g_{13} &= 0 & g_{14} &= \frac{1}{R} & g_{15} &= \frac{1}{R} & g_{16} &= 0 & g_{17} &= 0 & g_{18} &= 0 \\
 g_{21} &= \frac{1}{R} & g_{22} &= \frac{3}{R} & g_{23} &= \frac{1}{R} & g_{24} &= 0 & g_{25} &= 0 & g_{26} &= \frac{1}{R} & g_{27} &= 0 & g_{28} &= 0 \\
 g_{31} &= 0 & g_{32} &= \frac{1}{R} & g_{33} &= \frac{3}{R} & g_{34} &= \frac{1}{R} & g_{35} &= 0 & g_{36} &= 0 & g_{37} &= \frac{1}{R} & g_{38} &= 0 \\
 g_{41} &= \frac{1}{R} & g_{42} &= 0 & g_{43} &= \frac{1}{R} & g_{44} &= \frac{3}{R} & g_{45} &= 0 & g_{46} &= 0 & g_{47} &= 0 & g_{48} &= \frac{1}{R} \\
 g_{51} &= \frac{1}{R} & g_{52} &= 0 & g_{53} &= 0 & g_{54} &= 0 & g_{55} &= \frac{3}{R} & g_{56} &= \frac{1}{R} & g_{57} &= 0 & g_{58} &= \frac{1}{R} \\
 g_{61} &= 0 & g_{62} &= \frac{1}{R} & g_{63} &= 0 & g_{64} &= 0 & g_{65} &= \frac{1}{R} & g_{66} &= \frac{3}{R} & g_{67} &= \frac{1}{R} & g_{68} &= 0 \\
 g_{71} &= 0 & g_{72} &= 0 & g_{73} &= \frac{1}{R} & g_{74} &= 0 & g_{75} &= 0 & g_{76} &= \frac{1}{R} & g_{77} &= \frac{3}{R} & g_{78} &= \frac{1}{R} \\
 g_{81} &= 0 & g_{82} &= 0 & g_{83} &= 0 & g_{84} &= \frac{1}{R} & g_{85} &= \frac{1}{R} & g_{86} &= 0 & g_{87} &= \frac{1}{R} & g_{88} &= \frac{3}{R}
 \end{aligned}$$

Sada treba uzeti u obzir da je (ovdje)  $\varphi_7=0$ , a  $\varphi_1=+U=1$  te da su svi otpornici jednaki ( $R=1$ ) i to uvrstiti u sustav jednažbi (1)-(8) pa se onda dobije šest jednažbi (jednažbe (1) i (7) otpadaju!):

$$+ \varphi_2 \cdot g_{22} - \varphi_3 \cdot g_{23} - \varphi_4 \cdot g_{24} - \varphi_5 \cdot g_{25} - \varphi_6 \cdot g_{26} - \varphi_8 \cdot g_{28} = \frac{U}{R} \quad (2)$$

$$- \varphi_2 \cdot g_{32} + \varphi_3 \cdot g_{33} - \varphi_4 \cdot g_{34} - \varphi_5 \cdot g_{35} - \varphi_6 \cdot g_{36} - \varphi_8 \cdot g_{38} = 0 \quad (3)$$

$$- \varphi_2 \cdot g_{42} - \varphi_3 \cdot g_{43} + \varphi_4 \cdot g_{44} - \varphi_5 \cdot g_{45} - \varphi_6 \cdot g_{46} - \varphi_8 \cdot g_{48} = \frac{U}{R} \quad (4)$$

$$- \varphi_2 \cdot g_{52} - \varphi_3 \cdot g_{53} - \varphi_4 \cdot g_{54} + \varphi_5 \cdot g_{55} - \varphi_6 \cdot g_{56} - \varphi_8 \cdot g_{58} = \frac{U}{R} \quad (5)$$

$$- \varphi_2 \cdot g_{62} - \varphi_3 \cdot g_{63} - \varphi_4 \cdot g_{64} - \varphi_5 \cdot g_{65} + \varphi_6 \cdot g_{66} - \varphi_8 \cdot g_{68} = 0 \quad (6)$$

$$- \varphi_2 \cdot g_{82} - \varphi_3 \cdot g_{83} - \varphi_4 \cdot g_{84} - \varphi_5 \cdot g_{85} - \varphi_6 \cdot g_{86} + \varphi_8 \cdot g_{88} = 0 \quad (8)$$

Nakon sređivanja na kraju se dobije sljedeći sustav jednažbi:

$$+ 3\varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_6 = 1 \quad (2)$$

$$- \varphi_2 + 3\varphi_3 - \varphi_4 = 0 \quad (3)$$

$$- \varphi_3 + 3\varphi_4 - \varphi_8 = 1 \quad (4)$$

$$+ 3\varphi_5 - \varphi_6 - \varphi_8 = 1 \quad (5)$$

$$- \varphi_2 - \varphi_5 + 3\varphi_6 = 0 \quad (6)$$

$$- \varphi_4 - \varphi_5 + 3\varphi_8 = 0 \quad (8)$$

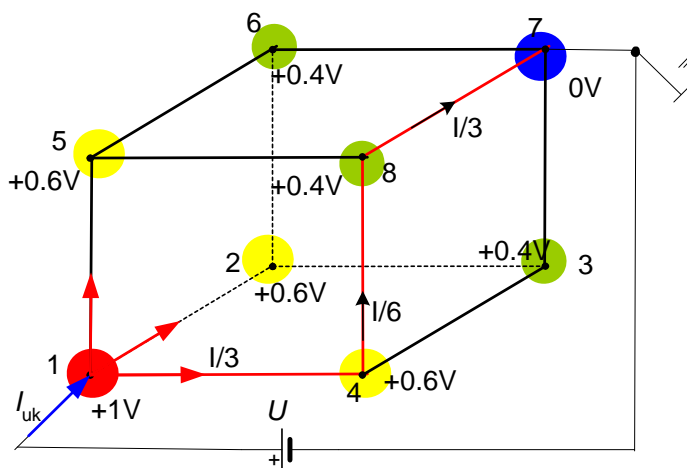
Nepoznanice su potencijali čvorova **2, 3, 4, 5, 6, 8**. Matričnom metodom dobili smo:

$$\varphi_2 = 0.6 \quad \varphi_3 = 0.4 \quad \varphi_4 = 0.6 \quad \varphi_5 = 0.6 \quad \varphi_6 = 0.4 \quad \varphi_8 = 0.4$$

Uz zadano  $\varphi_1=U=1$  i  $\varphi_7=0$  imamo potencijale svih čvorova iz kojih jednostavno izračunavamo struje. Sve mora biti u skladu sa Kirchhoffovim zakonima, tj. struje se automatski uspostave u skladu sa KZ.

Dobivene potencijale upisujemo na pregledan način na sliku kocke (slika 3). Vidimo da su po tri točke (2, 4, 5 na 0.6 V) i (3, 6, 8 na 0.4 V) na istom potencijalu. Zanimljivo je primjetiti da je potencijal pojedine točke srednja vrijednost potencijala susjednih točaka (osim za točke 7 i 1). Npr.  $\varphi_6=(\varphi_5+\varphi_2+\varphi_7)/3$  !

Očito se ukupna struja dijeli u tri jednake struje po 0.4 A pa je ukupna struja 1.2 A, a otpor  $R_{uk}=U/I=1/1.2=0.833$  oma. Možemo to napisati koristeći KZN (na crveno označenom putu) ovako  $U=(I/3 + I/3 + I/6) \cdot R$  pa je  $R_{uk}=(5/6) \cdot R$ . dakle otpor kocke između vrhova 1 i 7 je 5/6 puta otpor pojedinog otpora. Na sličan način (novim sustavom jednažbi) možemo izračunati otpor između bilo koja dva vrha. Ako promijenimo bilo koji otpor u bridu odnosno ako otpori u bridovima nisu jednaki gubi se simetričnost! Postupak izračunavanja bio bi isti i za takve kocke samo bi se promijenili koeficijenti u jednažbama.

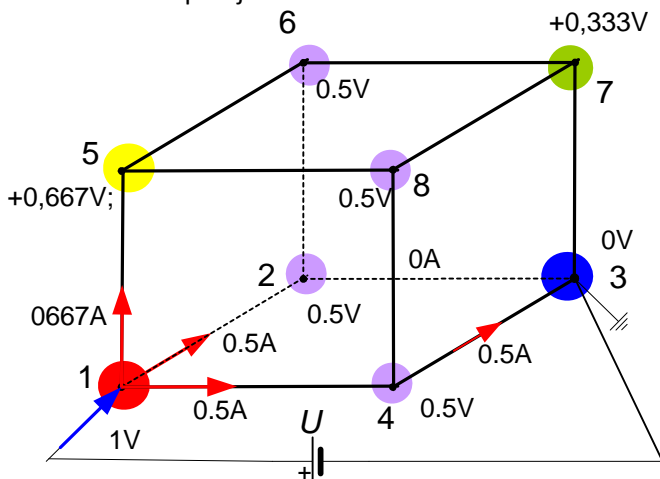


Slika 3

**Pitanje 1.** Što se događa sa potencijalima ako sve otpore od kojih je sastavljena kocka povećamo ili smanjimo? Ako otpore povećamo ili smanjimo potencijali će ostati isti.

**Pitanje 2.** Što se događa sa potencijalima ako napon izvora povećamo ili smanjimo? Ako povećamo ili smanjimo napon izvora potencijali će se proporcionalno povećati odnosno smanjiti.

Na slici 4 prikazana je raspodjela potencijala za kocku sastavljenu od jednakih otpornika, ali koja je između vrhova 1 i 3 priključena na izvor od 1 V.



Slika 4

U početni sustavu jednadžbi treba uvrstiti da je  $\phi_1=1$ , a  $\phi_3=0$ . Ukupna struja je sada 1.667 A. Otpor između 1 i 3 je 0.75 oma odnosno  $R_{uk}=(3/4) \cdot R$ . **Napomena:** točke koje su na istom potencijalu mogu se spojiti. Struja između takvih točaka-čvorova je nula, npr. ovdje je  $I_{48}=I_{26}=0$ .

Moguće je do rješenja doći i višestrukom primjenom transformacija trokut  $\leftrightarrow$  zvijezda što prepuštamo zainteresiranom čitatelju (koji je uporan i ima vremena). Čini se da za rješavanje takvih problema treba ipak rabiti programe za simulaciju koji zapravo iz grafičkog prikaza mreže (koji crtamo na zaslonu) ustvari "pišu i rješavaju sustav jednadžbi". Jedan od jednostavnijih programa mogli ste upoznati na predhodnoj stranici. Poznatiji u profesionalnoj uporabi (alati) su SPICE\*, Multisim\*\*....(pogledati na netu [circuits simulation](#)). Neke od programa za simulaciju zasigurno ćete upoznati detaljnije tijekom studija elektrotehnike.

*I.Felja 12.2013.*

\***SPICE** is a general-purpose circuit simulation program for nonlinear dc, nonlinear transient, and linear ac analyses. Circuits may contain resistors, capacitors, inductors, mutual inductors, independent voltage and current sources, four types of dependent sources, lossless and lossy transmission lines (two separate implementations), switches, uniform distributed RC lines, and the five most common semiconductor devices: diodes, BJTs, JFETs, MESFETs, and MOSFETs. SPICE originates from the [EECS Department of the University of California at Berkeley](#).

\*\***Multisim** is an industry-standard, best-in-class SPICE simulation environment. It is the cornerstone of the National Instruments circuits teaching solution to build expertise through practical application in designing, prototyping, and testing electrical circuits. The Multisim design approach helps you save prototype iterations and optimize printed circuit board (PCB) designs earlier in the process.