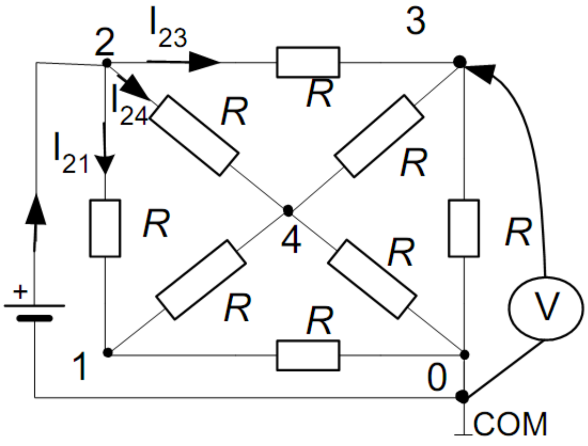
PRIMJER ZA PRIMJENU METODE ČVOROVA

Zadan je spoj prema slici u kojem treba izračunati potencijale čvorova 1, 3 i 4 primjenom metode napona čvorova. Nakon toga treba izračunati struje kroz svaki otpornik i ukupnu struju izvora kao i otpor mreže otpornika sa strane izvora.



***R* = 1 Ω** ***U* = 1 V**

Rješenje: potencijal čvora 2 je *U* (1 V), a čvora 0 upravo 0 V (to je tzv. referentni čvor). Nepoznati su ovdje potencijali čvorova 1, 4 i 3.
Metoda napona čvorova proizlazi iz Kirchhoffovih jednadžbi (pogledati predavanja). U suštini je potrebno napisati sustav linearnih jednadžbi u kojima su nepoznanice upravo ti potencijali. Potencijale obično označavamo slovom φ.

U stvarnoj mreži mogli bismo te potencijale izmjeriti voltmetrom tako da priključnicu **COM** voltmetra stavimo na ref. čvor (ovdje 0), a zatim redom izmjerimo napone, tj. potencijale ostalih čvorova (na slici mjerimo potencijal čvora 3). Kada imamo te potencijale nije nikakav problem izračunati napone između čvorova (npr. napon $U_{34}=\varphi_3-\varphi_4$) te struje (npr. $I_{34}=U_{34}/R$, ima smjer od čvora 3 prema čvoru 4).

Računska primjena metode napona čvorova nakon pisanja jednadžbi postaje matematički problem. Ako imamo mrežu sa dva ili tri čvora možemo su upustiti u "ručno" rješavanje sustava linearnih jednadžbi dok je za veći broj čvorova odnosno jednadžbi korisno imati i primijeniti odgovarajuće programsko pomagalo.

Krenimo pisati jednadžbe za zadanu mrežu (za opći oblik vidi *recept* u predavanjima):

čvor 1: $$\varphi_1\cdot\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R}+\frac{1}{R}\right)-\varphi_2\cdot\frac{1}{R}-\varphi_3\cdot 0-\varphi_4\cdot\frac{1}{R}=0 \quad \textbf{(1)}$$

čvor 2: $$\varphi_2=U \quad \textbf{(2)}$$

čvor 3: $$-\varphi_1\cdot 0-\varphi_2\cdot\frac{1}{R}+\varphi_3\cdot\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R}+\frac{1}{R}\right)-\varphi_4\cdot\frac{1}{R}=0 \quad \textbf{(3)}$$

čvor 4: $$-\varphi_1\cdot\frac{1}{R}-\varphi_2\cdot\frac{1}{R}-\varphi_3\cdot\frac{1}{R}+\varphi_4\cdot\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R}+\frac{1}{R}+\frac{1}{R}\right)=0 \quad \textbf{(4)}$$

Kada jednadžbu (2) uvrstimo u (1), (3) i (4) dobijemo sustav koji treba riješiti:

čvor 1: $$\varphi_1\cdot\frac{3}{R}-\varphi_3\cdot 0-\varphi_4\cdot\frac{1}{R}=\frac{U}{R} \quad \textbf{(1)}$$

čvor 3: $$-\varphi_1\cdot 0+\varphi_3\cdot\frac{3}{R}-\varphi_4\cdot\frac{1}{R}=\frac{U}{R} \quad \textbf{(3)}$$

čvor 4: $$-\varphi_1\cdot\frac{1}{R}-\varphi_3\cdot\frac{1}{R}+\varphi_4\cdot\frac{4}{R}=\frac{U}{R} \quad \textbf{(4)}$$

Imamo sustav od tri jednadžbe s tri nepoznanice φ_1, φ_3, φ_4. Za rješavanje koristimo program *MathCad*. Zapišimo gornji sustav jednadžbi u matričnom obliku kao **A**·**X**=**B**, gdje je: **A** 3x3 matrica s koeficijentima uz nepoznanice; **X** 3x1 matrica s nepoznanicama; **B** 3x1 matrica s poznatim vrijednostima s desne strane jednadžbi.

$$\begin{bmatrix}\frac{3}{R} & 0 & -\frac{1}{R}\\ 0 & \frac{3}{R} & -\frac{1}{R}\\ -\frac{1}{R} & -\frac{1}{R} & \frac{4}{R}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\varphi_1\\ \varphi_3\\ \varphi_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{U}{R}\\ \frac{U}{R}\\ \frac{U}{R}\end{bmatrix} \quad \text{odnosno:} \quad \begin{bmatrix}3 & 0 & -1\\ 0 & 3 & -1\\ -1 & -1 & 4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\varphi_1\\ \varphi_3\\ \varphi_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$$

Treba primijetiti da su elementi glavne dijagonale matrice **A** "vlastite vodljivosti" čvorova (predznak +) dok su svi ostali elementi vodljivosti između različitih čvorova (predznak –). Ali između nekih čvorova vodljivost može biti i nula (pogledajte kojih i objasnite zašto)!

Sada tražimo rješenja matrične jednadžbe **X**=**A**$^{-1}$·**B**. Naredbe koje su specifične za program *MathCad* izostavljamo.

Konačni rezultati su:

φ_1 = 0.5 V	φ_3 = 0.5 V	φ_4 = 0.5 V

Više o sustavima linearnih jednadžbi na matematici. Za rješavanje možete koristiti bilo koje programsko pomagalo ili se upustite u "ručno" rješavanje. Pokušajte riješiti jednadžbe na "svoj" način.

Važno: na ispitu iz OE potrebno je znati

1. napisati sustav jednadžbi za bilo koju mrežu
2. znati "ručno" riješiti sustav do tri jednadžbe

Metoda čvorova se često koristi u mrežama s dva čvora. Napon između ta dva čvora izračunava se tzv. *Millmanovom formulom*. To je zapravo specijalni slučaj metode čvorova koja se onda naziva *Millmanova metoda*. Nakon izračunavanja tog napona izračunavamo struje u granama koje su paralelno spojene između ta dva čvora. Ponekad nastojimo (i uspijevamo) raznim transformacijama pojednostaviti mrežu i tako smanjiti broj potrebnih jednadžbi.

I.Felja 11. 2013.

Kad znamo potencijale čvorova neće biti problem izračunati ukupnu struju i struje kroz sve otpornike.
Napomena: struja je nula kroz otpornike koji su između čvorova na istom potencijalu.
Rezultat: ukupna struja je 1.5 A.

Upišite potencijale svih čvorova i sve struje na shemu spoja. Provjerite Kirchhoffove zakone za sve čvorove i konture. Usporedite ovaj način rješavanja (metodom čvorova) s onim u kojem smo na istom problemu (istoj mreži) primijenili transformaciju zvijezda-trokut (**link**).

Pitanje 1. Zamislimo da je umjesto naponskog izvora između čvorova 2 i 0 bio zadan strujni izvor od 1.5 A (smjer prema 2). Kako bi sada izgledao sustav jednadžbi u kojem su nepoznanice potencijali čvorova 1, 2, 3 i 4? Napišite taj sustav jednadžbi. Koje je rješenje tog sustava?
Odgovor: φ_1=0.5 V, φ_2=1 V, φ_3=0.5 V, φ_4=0.5 V (*dakle isto kao kad smo imali naponski izvor od 1 V koji je "proizveo" struju od 1.5 A!*)

Pitanje 2. Koje bi bilo rješenje tog sustava ako: a) spomenuti strujni izvor ima serijski spojen otpornik od 1 Ω; b) ako ima struju od 3 A.
Odgovor: a) jednako; b) dvostruko

Pitanje 3. Kako izgledaju jednadžbe za čvorove ako otpornici u mreži imaju različite iznose? Npr. između čvorova 1 i 2 je otpor R_{12} između 3 i 4 je R_{34}...